

2.4.11 Nerovnice s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2206, 2409, 2410

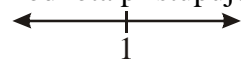
Pedagogická poznámka: Hlavním záměrem hodiny je, aby si studenti uvědomili, že se neučí nic nového. Pouze používají věci, které dávno znají, na částečně nové situace, ale pokud v těchto situacích, budou dodržovat stará pravidla, nemohou se zmýlit.

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny přesahuje 45 minut. Většina studentů by potřebovala minimálně polovinu další vyučovací hodiny na spočtení celé hodiny.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $|x-1| \leq 2$ všemi způsoby používanými při řešení rovnic.

1. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením R na intervaly (jako u funkcí)

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

 $\Rightarrow 2$ intervaly

$$x \in (-\infty; 1) \quad x-1 \leq 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1$$

Řešíme nerovnici: $|x-1| \leq 2$.

$$-x+1 \leq 2$$

$-1 \leq x$ Nerovnosti vyhovuje interval $\langle -1; \infty \rangle$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu

$$x \in (-\infty; 1) \Rightarrow K_1 = \langle -1; 1 \rangle.$$

$$x \in \langle 1; \infty \rangle \quad x-1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$$

Řešíme nerovnici: $|x-1| \leq 2$.

$$x-1 \leq 2$$

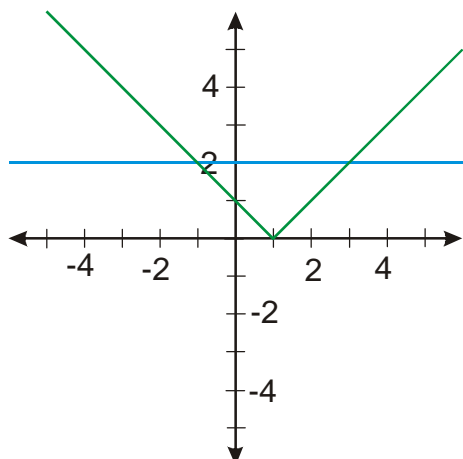
$x \leq 3$ Nerovnosti vyhovuje interval $x \in (-\infty; 3]$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu

$$x \in \langle 1; \infty \rangle \Rightarrow K_2 = \langle 1; 3 \rangle.$$

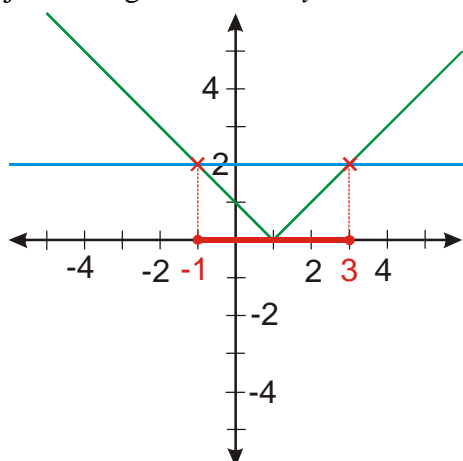
$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -1; 3 \rangle$$

2. způsob - grafické řešení

Nakreslíme grafy funkcí: $y = |x-1|$ (levá strana nerovnice), a $y = 2$ (pravá strana nerovnice).



Hledáme takové hodnoty x , pro které je levá strana nerovnice (funkce $y = |x - 1|$) menší nebo rovná pravé straně (funkci $y = 2$). Hodnoty obou stran jsou znázorněné y -vou souřadnicí obou funkcí. Hledáme tedy x , pro něž je bod grafu funkce $y = |x - 1|$ níže nebo stejně vysoko jako bod grafu funkce $y = 2$.

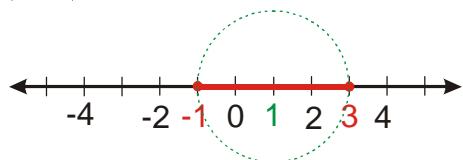


$$K = \langle -1; 3 \rangle$$

3. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

$|a - b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

$|x - 1| \leq 2 \Rightarrow$ hledáme body, které mají od 1 vzdálenost rovnou nebo menší než 2.



$$K = \langle -1; 3 \rangle$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $|x + 1| > -1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení definičního oboru použij jako poslední.

1. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

$|a - b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

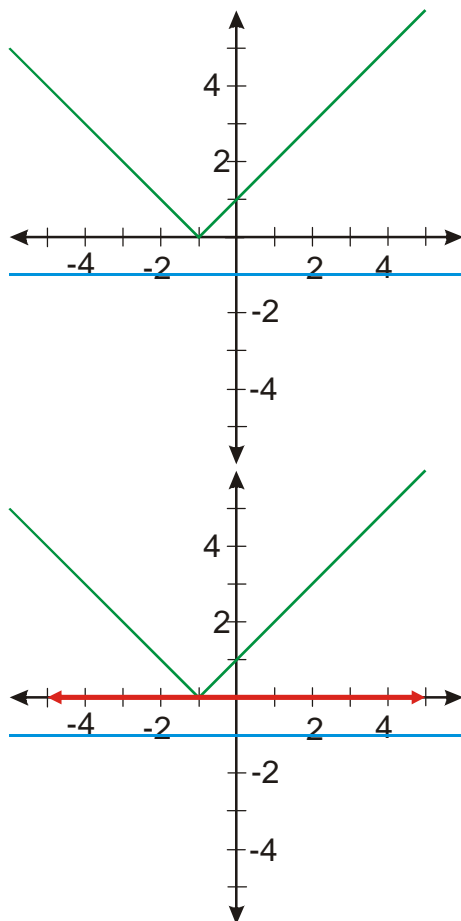
Upravíme výraz v absolutní hodnotě: $|x+1|=|x-(-1)| > -1$

Zápis: $|x-(-1)| > -1$ znamená \Rightarrow hledáme body, které mají od -1 vzdálenost větší než $-1 \Rightarrow$ řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla, protože vzdálenost libovolného čísla od čísla -1 je nezáporná a tedy větší než -1 .

$$K = R$$

2. způsob - grafické řešení

Nakreslím grafy funkcí: $y = |x+1|$ (levá strana rovnice) a $y = -1$ (pravá strana rovnice).



Všechny body grafu funkce $y = |x+1|$ jsou nad body grafu funkce $y = -1$. Řešením nerovnice je množina R .

$$K = R$$

3. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením R na intervaly

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\xrightarrow{\quad -1 \quad}$ \Rightarrow 2 intervaly

$$x \in (-\infty; -1) \quad x+1 \leq 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) = -x-1$$

Řešíme nerovnici: $|x+1| > -1$.

$$-x-1 > -1$$

$0 > x$ Zdá se, že řešením je interval $(-\infty; 0)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $(-\infty; -1)$) $\Rightarrow K_1 = (-\infty; -1)$.

$$x \in \langle -1; \infty \rangle \quad x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

Řešíme nerovnici: $|x+1| > -1$.

$$x+1 > -1$$

$x > -2$ Zdá se, že řešením je interval $(-2; \infty)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $\langle -1; \infty \rangle$) $\Rightarrow K_2 = \langle -1; \infty \rangle$.

$$K = K_1 \cup K_2 = R$$

Pedagogická poznámka: Existují studenti, kteří píšou do předchozího příkladu prázdnou množinu řešení, protože například v kladné části definičního oboru vychází nerovnost $x > -2$ a protože -2 nepatří mezi čísla, se kterými počítali nemůže mít nerovnice řešení. Je třeba jim vysvětlit, že hrana intervalu řešení nehraje takovou roli. Pouze určuje, která z čísel jsou řešením částečné nerovnice, a pokud některé z nich patří mezi ta, se kterými jsme počítali, našli jsme řešení, i přesto, že hrana intervalu je podmínkou vyloučena.

Pedagogická poznámka: Studentům činí potíže porovnávat při využívání číselné osy vzdálenost čísel se záporným číslem. Když si osu nakreslíte -1 a zkoušíte jestli podmínka pro vzdálenost platí pro konkrétní čísla, většina z nich se chytí.

Pedagogická poznámka: Pokud ukazujete výsledky grafického řešení a všichni studenti ho ještě nemají hotové, ukažte nejdříve pouze obrázek bez řešení, aby se řešení studenti pokusili najít sami.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $|x+2|+2 < 1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení R použij jako poslední.

1. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

$|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

Upravíme výraz v absolutní hodnotě: $|x+2| = |x-(-2)|$.

Upravíme nerovnici tak, aby na levé straně byla pouze absolutní hodnota: $|x-(-2)|+2 < 1$

$$|x-(-2)| < -1.$$

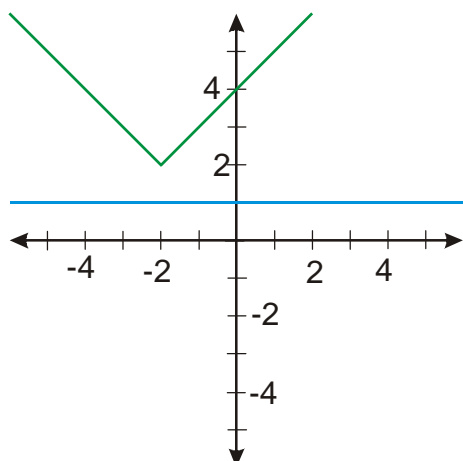
Zápis: $|x-(-2)| < -1$ znamená \Rightarrow hledáme body, které mají od -2 vzdálenost menší než -1

\Rightarrow nerovnice nemá řešení, protože vzdálenost libovolného čísla od čísla -2 je nezáporná a tedy větší než -1 .

$$K = \emptyset$$

2. způsob - grafické řešení

Nakreslím grafy funkcí: $y = |x+2|+2$ (levá strana rovnice), a $y = 1$ (pravá strana rovnice).



Všechny body grafu funkce $y = |x + 2| + 2$ jsou nad body grafu funkce $y = 1$. Podle zadání nerovnice, má být levá strana menší, hledáme takové body, pro které je graf levé strany níže než graf pravé strany. Žádný takový bod neexistuje. Nerovnice nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

3. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením R na intervaly

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje?) $\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \quad | \quad \rightarrow \\ -1 \end{array} \Rightarrow 2 \text{ intervaly}$$

$$x \in (-\infty; -2) \quad x + 2 \leq 0 \Rightarrow |x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$$

Řeším nerovnici: $|x + 2| + 2 < 1$.

$$-x - 2 + 2 < 1$$

$-1 < x$ Zdá se, že řešením je interval $(-1; \infty)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se

kterými jsme počítali (interval $(-\infty; -2)$), protože neexistuje žádné číslo, které by bylo v obou intervalech $\Rightarrow K_1 = \emptyset$.

$$x \in (-2; \infty) \quad x + 2 \geq 0 \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

Řešíme nerovnici: $|x + 2| + 2 < 1$.

$$x + 2 + 2 < 1$$

$x < -3$ Zdá se, že řešením je interval $(-\infty; -3)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla se

kterými jsme počítali (interval $(-2; \infty)$), protože neexistuje žádné číslo, které by bylo v obou intervalech $\Rightarrow K_2 = \emptyset$.

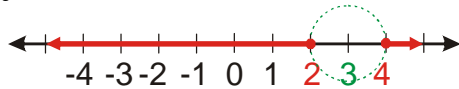
$$K = K_1 \cup K_2 = \emptyset$$

Poznámka: Dále budeme používat pouze jednu metodu řešení, nejlépe tu nejjednodušší.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $|x - 3| \geq 1$, pomocí nevhodnějšího postupu. Volbu postupu zdůvodni.

Nejrychleji nerovnici vyřešíme pomocí definice absolutní hodnoty rozdílu dvou čísel. Na levé straně je pouze absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel, na pravé straně pouze reálné číslo. Definici tak můžeme ihned použít.

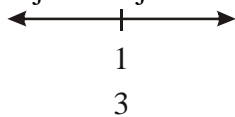
$|x-3| \geq 1 \Rightarrow$ Hledáme čísla, jejichž obrazy na číselné ose jsou od obrazu čísla 3 vzdálené jedna nebo více.



$$K = (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $|3x-1| < x$.

V nerovnici se vyskytuje neznámá na dvou místech, vlevo je navíc násobená třemi \Rightarrow nejvhodnější metodou je dělení definičního oboru.



\Rightarrow dva intervaly

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \quad 3x-1 \leq 0 \Rightarrow |3x-1| = -(3x-1) = -3x+1$$

Řešíme nerovnici: $|3x-1| < x$.

$$-3x+1 < x$$

$$1 < 4x$$

$$x > \frac{1}{4} \quad \text{Zdá se, že řešením je interval } \left(\frac{1}{4}; \infty\right), \text{ ale musíme z něj započíst pouze čísla,}$$

$$\text{se kterými jsme počítali (interval } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \text{)} \Rightarrow K_1 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right).$$

$$x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \quad 3x-1 \geq 0 \Rightarrow |3x-1| = 3x-1$$

Řešíme rovnici: $|3x-1| < x$

$$3x-1 < x$$

$$2x < 1$$

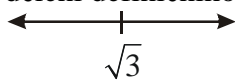
$$x < \frac{1}{2} \quad \text{Zdá se, že řešením je interval } \left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \text{ ale musíme z něj započíst pouze čísla,}$$

$$\text{se kterými jsme počítali (interval } \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \text{)} \Rightarrow K_2 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $|x-\sqrt{3}| > 2+5\sqrt{3}$.

V nerovnici se vyskytují odmocniny \Rightarrow grafické řešení nám nedá přesný výsledek. Použijeme dělení definičního oboru.



\Rightarrow dva intervaly

$$x \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \quad x-\sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow |x-\sqrt{3}| = -x+\sqrt{3}$$

$$-x + \sqrt{3} > 2 + 5\sqrt{3}$$

$$x < -2 - 4\sqrt{3}$$

$$K_1 = (-\infty; \sqrt{3}) \cap (-\infty; -2 - 4\sqrt{3}) = (-\infty; -2 - 4\sqrt{3})$$

$$x \in \langle \sqrt{3}; \infty \rangle$$

$$x - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow |x - \sqrt{3}| = x - \sqrt{3}$$

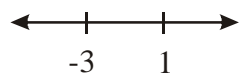
$$x - \sqrt{3} > 2 + 5\sqrt{3}$$

$$x > 2 + 6\sqrt{3}$$

$$K_2 = \langle \sqrt{3}; \infty \rangle \cap (2 + 6\sqrt{3}; \infty) = (2 + 6\sqrt{3}; \infty)$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -2 - 4\sqrt{3}) \cup (2 + 6\sqrt{3}; \infty)$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $|1-x| > 3|x+3|$.



\Rightarrow tři intervaly

$$x \in (-\infty; -3)$$

$$1 - x > 3(-x - 3)$$

$$1 - x > -3x - 9$$

$$2x > -10$$

$$x > -5$$

$$K_1 = (-5; -3)$$

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

$$1 - x > 3(x + 3)$$

$$1 - x > 3x + 9$$

$$-8 > 4x$$

$$x < -2$$

$$K_2 = \langle -3; -2 \rangle$$

$$x \in \langle 1; \infty \rangle$$

$$-1 + x > 3(x + 3)$$

$$-1 + x > 3x + 9$$

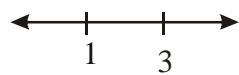
$$-10 > 2x$$

$$-5 > x$$

$$K_3 = \emptyset$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-5; -2)$$

Př. 8: Vyřeš nerovnici $|2x+1| - |3-x| > x$.



-

2

\Rightarrow tři intervaly

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$$

$$-2x - 1 - (3 - x) > x$$

$$-2x - 1 - 3 + x > x$$

$$-4 > 2x$$

$$x < -2 \quad K_1 = (-\infty; -2)$$

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$$

$$2x + 1 - (3 - x) > x$$

$$2x + 1 - 3 + x > x$$

$$2x > 2$$

$$x > 1 \quad K_2 = (1; 3)$$

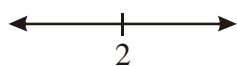
$$x \in \langle 3; \infty \rangle$$

$$2x + 1 + (3 - x) > x$$

$$0 > -4 \quad K_3 = \langle 3; \infty \rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$$

Př. 9: Vyřeš nerovnici $\frac{x}{|x-2|} \leq 3$.



\Rightarrow dva intervaly, platí podmínka $|x-2| \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

upravíme nerovnici:

$\frac{x}{|x-2|} \leq 3 \quad / \cdot |x-2|$ výraz, kterým násobíme je vždy kladný, a tak se nemusíme starat o

změnu znaménka nerovnosti \Rightarrow řešíme nerovnici $x \leq 3|x-2|$

$$x \in (-\infty; 2)$$

$$x \leq 3(-x+2)$$

$$x \leq -3x+6$$

$$4x \leq 6$$

$$x \leq \frac{3}{2} \quad K_1 = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$$

$$x \in \langle 2; \infty \rangle$$

$$x \leq 3(x-2)$$

$$x \leq 3x-6$$

$$6 \leq 2x$$

$$3 \leq x \quad K_2 = \langle 3; \infty \rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \langle 3; \infty \rangle$$

Př. 10: Vyřeš nerovnici $\frac{|x+3|}{x+1} \geq 2$.

Podmínka $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Musíme sledovat znaménko dvou výrazů:

- Výrazu $x+3$, protože je v absolutní hodnotě a jeho znaménko rozhoduje o způsobu odstranění absolutní hodnoty
- Výrazu $x+1$, protože je ve jmenovateli zlomku, potřebujeme jím nerovnici vynásobit a na jeho znaménku závisí, zda budeme měnit znaménko nerovnosti nebo ne.



-3 -1 \Rightarrow tři intervaly

$$x \in (-\infty; -3)$$

$$\frac{-x-3}{x+1} \geq 2 \quad / (x+1) - \text{násobíme záporným číslem}$$

$$-x-3 \leq 2(x+1)$$

$$-x-3 \leq 2x+2$$

$$-5 \leq 3x$$

$$-\frac{5}{3} \leq x \quad K_1 = \emptyset$$

$$x \in (-3; -1)$$

$$\frac{x+3}{x+1} \geq 2 \quad / (x+1) - \text{násobíme záporným číslem}$$

$$x+3 \leq 2(x+1)$$

$$x+3 \leq 2x+2$$

$$1 \leq x \quad K_2 = \emptyset$$

$$x \in (-1; \infty)$$

$$\frac{x+3}{x+1} \geq 2 \quad / (x+1) - \text{násobíme kladným číslem}$$

$$x+3 \geq 2(x+1)$$

$$x+3 \geq 2x+2$$

$$1 \geq x \quad K_3 = (-1; 1)$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-1; 1)$$

Př. 11: Řešení předchozího příkladu nebylo zdaleka ideální. Při pečlivém rozvážení jsme mohli ušetřit dvě třetiny výpočtů. Jak a proč?

Stačí si uvědomit, že čítec zlomku je kladné číslo (nebo nula), znaménko pak závisí pouze na znaménku jmenovatele. Zlomek má být větší než dva, musí být kladný a tak musí být kladný i jeho jmenovatel. První dva intervaly jsme tak mohli vyloučit ihned a stačilo spočítat třetí.

Př. 12: Petáková:
strana 15/cvičení 23 a) c) k)

Shrnutí: K řešení nerovnic s absolutní hodnotou přistupujeme analogicky jako k řešení rovnic s absolutní hodnotou.